Uitwerking Toets Discrete Structuren

donderdag 11 maart 2010, 9:00 -11:00 uur

1. Toon aan dat de volgende bewering waar is, of geef een tegenvoorbeeld: $\overline{A \cup B} \implies \overline{A} \cap \overline{B}$

   Antw: Gebruik de definitie van verzamelingen operaties: Veronderstel dat $x \in \overline{A \cup B}$, dus: $x \notin (A \cup B)$. Maar dan geldt: $x \notin A$ **en** $x \notin B$. Wat weer neerkomt op $x \in \overline{A}$ en $x \in \overline{B}$. Dus: $x \in (\overline{A} \cap \overline{B})$.

2. Als $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ...P_n\}$ een partitie is van een verzameling V. En E is de relatie $(P_1 \times P_1) \cup ... \cup (P_n \times P_n)$ Toon aan dat E een equivalentierelatie is en dat de elementen van $\mathcal{P}$ precies de equivalentieklassen van E zijn.

   Antw: Ga voor E na dat de relatie voldoet aan de drie voorwaarden (RST) voor equivalentierelatie.

3. Bewijs met mathematische inductie dat: $\Sigma_{i=1}^{n} i < \frac{(2n+1)^2}{8}$.

   Antw:

Basis: $P(1) : 1 < \frac{9}{8}$

Inductie: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ met inductiehypothese: $\Sigma_{i=1}^{k} i < \frac{(2k+1)^2}{8}$
Te bewijzen: $\Sigma_{i=1}^{(k+1)} i < \frac{(2(k+1)+1)^2}{8}$
Het linkerlid is: $\Sigma_{i=1}^{k} i + k + 1$
En het rechterlid vereenvoudigt tot: $\frac{(2k+1)^2}{8} + k + 1$
QED

4. Wat kun je zeggen van een relatie R, als R behalve een equivalentierelatie ook een partiële ordeningsrelatie is.

   Antw: Als R symmetrisch is op grond van het feit dat het een equivalentierelatie is en antisymmetrisch vanwege het feit dat het een poset is, dan is het de identiteitsrelatie.

5. Als de graaf G_1 een Euleriaans circuit heeft en G_2 is isomorf met G_1, dan heeft G_2 ook een Euleriaans circuit. Toon dit aan.

   Antw: G_2 is isomorf met G_1 als er een bijectie, f, bestaat van $V(G_2)$ naar $V(G_1)$, zodanig dat als (a, b) een kant is van G_2 d.e.s.d.a. $(f(a), f(b))$ een kant is van G_1.

   Als elke knoop van G_1 een even aantal kanten heeft omdat het een Euleriaans circuit heeft, dan geldt dat ook voor G_2. Dus heeft ook G_2 een Euleriaans circuit.

6. Laat P een *poset* zijn. Definieer voor P de begrippen: **kleinste element**, **ondergrens (lower bound)** en **grootste ondergrens (greatest lower bound)**.

   Antw: Zie boek. (Voorbereiding op de volgende vraag)

7. Geef een definitie van **meet** ($\wedge$) en toon aan dat **meet** een associatieve operator is.

   Antw: De **meet** ($\wedge$) is de GLB van twee elementen van een tralie en voldoet aan de volgende twee eigenschappen:

   (a) $a \wedge b \leq a$ en $a \wedge b \leq b$ (lower bound van a en b).

   (b) $c \leq a$ en $c \leq b$ dan $c \leq a \wedge b$ (c greatest lower bound)

   Hieruit volgt dat als $c = a \wedge b$ dat dan ook $c = b \wedge a$.

8. (**Bonus**) Gegeven de acyclische graaf $G = (V, R)$. Definieer E als de kleinste lineaire ordening die R omvat. Wat kun je zeggen over R en E indien G samenhangend is? Hoeveel *verschillende* kleinste lineaire ordeningen bestaan er voor G?

   Antw: Stel G bestaat uit een aantal samenhangingscomponenten, die lineair zijn. Dan kunnen die componenten op $(n-1)!$ manieren tot één lineaire keten samenvoegen door een link te leggen tussen het laatste element,l, van een keten en het eerste element van een andere keten, e, dus voeg (l, e) toe aan E.

   Dat is niet nodig als G al samenhangend is.

   N.b.: Bijna niemand heeft het volgende aspect doorzien. Als een samenhangingscomponent niet lineair is, dan is het in ieder geval een boom. De kunst is dan om de verschillende paden in de boom tot é'eń te rijgen. Dat kan zo: Stel $a, ...k, k, l...b$ en $k, ...c$ zijn drie ketens die een boom vormen met k als wortel. Dan is $a, ...k, l, ...b$ een keten. De keten $k, ...c$ is daarin te voegen door het element (c, l) aan de relatie toe te voegen.